УДК 524.8

Д.Б. Волов

ДИФФЕОМОРФНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ В МОДИФИЦИРОВАННОМ УРАВНЕНИИ КЛЕЙНА – ГОРДОНА - ФОКА

Рассматриваются модификации уравнения Клейна-Гордона-Фока, основанные на недавно открытой способности постоянной тонкой структуры упорядочивать ренормгруппы в одномерном отображении Ферхюльста-Рикера-Планка. Показано, как остаточные силы сильного взаимодействия могут переходить в гравитационные и кулоновские силы, а также сделана попытка объяснения спонтанного нарушения симметрии и конфайнмента в барионах и спейсонах.

Ключевые слова: Уравнения Клейна-Гордона, Дирака, Шредингера, калибровочная инвариантность, битриальная логика, Общая теория относительности, метрика пространства.

Для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу покоя, используют уравнение Клейна – Гордона – Фока (КГФ) [1]:

$$\left(\Box^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0\,,\ \Box^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\,, \tag{1}$$

которое в виде $\left(\Box^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$ применимо к описанию скалярных (псевдоскалярных) массивных полей. Здесь $\Box^2$ - даламбертиан, m – масса, c - скорость света, $\hbar$ - редуцированная постоянная Планка, ψ - волновая функция, φ - полевая функция или ее компоненты в пространстве внутренней симметрии, x – координаты в пространстве-времени (точка в пространстве-времени). Решение записывается в виде суперпозиции волн: $\psi(\mathbf{r},t) = \exp(\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t))$, непосредственная подстановка которых уравнение (1) налагает условие на волновые числа k и круговую частоту ω [1].

В присутствии гравитационного поля с метрикой $g_{\mu\nu}$ неабелевость в даламбертиане учитывается записью (1) в виде [2]:

$$\sqrt{-g}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\varphi\right] + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi = 0\,, \tag{2}$$

где $g = \left\|g^{\mu\nu}\right\|$ - определитель метрики, $\mu,\ \nu = 0, 1, 2, 3$.

В свое время уравнение (1) позволило достаточно хорошо описать поведение поля остаточных сил сильного взаимодействия в стационарном сферически симметричном случае через потенциал:

$$\varphi = \frac{const \cdot e^{-\mu r}}{r}, \tag{3}$$

называемый потенциалом Юкавы, причем константа в числителе, которая отражает интенсивность взаимодействия, отрицательна, $\mu = mc/\hbar$ - имеет размерность [1/м], экспериментальная оценка $\mu \approx 10^{15}$ м$^{-1}$. Это предельный наблюдаемый радиус действия ядерных сил. Положительная экспоненциальная часть сопряженного (3) решения отбрасывается как нефизичная [3]. Волновое решение уравнения (1) для этого случая $\psi(z,t) = \exp(i(\omega t - kz))$ приводит к условию $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0$. Любое поле на достаточном расстоянии r, вдали от источника можно считать сферически симметричным, то есть не учитывать форму самого источника. Дальнейшие исследования сил сильного взаимодействия привели к созданию квантовой хромодинамики, которая объединяется с электрослабым взаимодействием в теории Глейшоу – Вайнберга – Салама.

Однако недавно открытое [4] свойство постоянной тонкой структуры α «очищать» хаотические динамики типа

$$\mu r \to \frac{-2q_1\mu^3}{(\mu r)^2\left(e^{\mu r} + \alpha\right)} \tag{4}$$

заставляет искать уравнение, решением которого для потенциала Юкавы будет не (3), а:

$$\varphi = \frac{const}{r\left(e^{\mu r} + \alpha\right)}. \tag{5}$$

Причем, опираясь на волновое решение уравнения КГФ, можно предположить, что для такого модифицированного уравнения КГФ частным волновым решением должно быть:

$$\psi = \frac{\psi_0}{e^{i\mu z} + \alpha}. \tag{6}$$

В отображении (4) $2q_1$ имеет смысл оператора рождения/уничтожения частиц, то есть минимальное число его равно 2: это бозон из двух фермионов. Этот оператор может иметь фрактальную структуру с альтернативным сплайсингом [5], но в простейшем случае это просто число элементарных носителей обобщенного заряда, число фермионов, из которых составлен бозон. При фиксированном μ при α = 1/137 имеем динамику «четыре крыски», при фиксированном x и $\alpha = -1$ – «бозонную» динамику [4]. При любом начальном условии x_0, выбранном из бассейна притяжения (он однозначно определяется константой скорости света c), через конечное число итераций (конечное число квантов времени – хрононов [6], [7]) получаем упорядоченную картину распределения x. Свойства этих «самоочищающихся» динамик подробно описаны в [4].

Дважды продифференцировав выражение (6) по выделенному направлению z, композируем такое уравнение, чтобы его решением и являлось (6):

$$\left(\left(1+\alpha e^{-i\mu z}\right)\Box^2+2i\mu\cdot\partial_\mu-\mu^2\right)\varphi=0\,,$$

или, для любого μ как собственного вектора (действительного, комплексного, кватернионного и т.д.):

$$\left(\left(1+\alpha e^{-\mu z}\right)\Box^2+2\mu\cdot\partial_\mu+\mu^2\right)\varphi=0\,. \tag{7}$$

Форма оператора первых производных ∂_μ в R^3-t в конкретных координатах будет несколько различна, но более целесообразной считаем его кватернионное представление: $\partial_\mu=\partial_x+\partial_y+\partial_z+ic\partial_t$. Здесь тогда 4-вектор $x = (x, y, z, ict)$, $\mu = (k_x, k_y, k_z, i\omega/c)$. Уравнение типа (7) будем называть модифицированным уравнением Клейна – Гордона – Фока (мКГФ). Автомодельность такого уравнения позволяет перейти от уравнения в частных производных к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Его решением в стационарном сферически симметричном случае как раз и будет модифицированный потенциал Юкавы (5), а само уравнение в сферических координатах требует наличия источника поля в правой части уравнения:

$$\left(1+\alpha e^{-\mu r}\right)\frac{\partial^2(r\varphi)}{r\partial r^2}+2\mu\frac{\partial\left(r^2\varphi\right)}{r^2\partial r}+\mu^2\varphi=\frac{2q_1\mu}{r^2\left(e^{\mu r}+\alpha\right)}, \tag{8}$$

который и появляется в (4).

Видно, что само уравнение (7) требует наличия скалярного поля в членах $2\mu\cdot\partial_\mu$, которое и есть модифицированное поле Хиггса.

Уравнения (7), (8) остаются справедливыми при любом действительном значении константы связи α, но именно при α = 1/137 система стремится к упорядоченному состоянию на больших временах. При $\alpha = 0$ система имеет сопряженные решения, еще симметрична, но неустойчива: $\alpha = 0$ не дает аттрактора динамики (4). Функции, построенные на модифицированной экспоненте, называются битриальным синусом, косинусом, экспонентой, шинусом и чосинусом соответственно (рис.1). Они всюду ограничены и не содержат расходимостей.

Модифицированный потенциал Юкавы (5) ведет себя несколько иначе, чем (3). Как в случае ОТО константа $8\pi G/c^4$ перед тензором энергии-импульса определялась из соображений перехода в предельном случае слабых полей и медленных движений к ньютоновскому гравитационному полю, так и мы определим константу в (5) таким образом, чтобы в предельном случае потенциал переходил в известные сферически симметричные поля. Для этого надо принять константу в (5) равной $\alpha\hbar c$. Заметим также, что отброшенное нефизичное стационарное решение (1), сопряженное с (3), решением (8) не является: для него требуется записать другое уравнение:

$$\left(1+\alpha e^{\mu r}\right)\frac{\partial^2(r\varphi)}{r\partial r^2}-2\mu\frac{\partial\left(r^2\varphi\right)}{r^2\partial r}+\mu^2\varphi=\frac{-2q_1\mu}{r^2\left(e^{-\mu r}+\alpha\right)}, \tag{9}$$

которое имеет вполне определенный физический смысл. Поэтому, чтобы восстановить сопряжение решений, уравнения (8) и (9) следует перемножить и привести к каноническому виду. Сразу сделаем это в ковариантной форме:

$$\left(\left(1+\alpha e^{-\mu x}\right)\Box^2+2\mu\cdot\partial_\mu+\mu^2\right)\left(\left(1+\alpha e^{\mu x}\right)\Box^2-2\mu\cdot\partial_\mu+\mu^2\right)\varphi^+\varphi=$$

$$\left(\sqrt{1+\alpha e^{-\mu x}}\;\Box_1+\mu\right)^2\cdot\left(\sqrt{1+\alpha e^{\mu x}}\;\Box^1-\mu\right)^2\varphi^+\varphi=\text{источники},\qquad(10)$$

где $\Box^1=i\gamma^\mu\partial_\mu$ - оператор Дирака в кинематической форме (обычный оператор Дирака, деленный на $\hbar c$), $\Box_1=-i\gamma_\mu\partial^\mu$ - сопряженный ему оператор, γ^μ - гамма-матрицы, используем правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу. Перегруппировав операторы в их пространстве, получаем уравнение мКГФ в форме (2), учитывающем влияние вещества на поле.

Поскольку операторы линейны, решение (9) складывается из суперпозиции частных решений. К примеру, рассмотрим стационарное частное решение (8), когда асимметрия уже реализовалась и система пришла в свое положение равновесия с α = –1 для бозонов поля и α = 1/137 для фермионов – частиц:

$$\left[q_2\right]^{-1}\varphi=-2q_1\alpha\hbar c\left[\frac{1}{r\left(e^{\mu r}+\alpha\right)}+\frac{1}{r\left(e^{-\mu r}+\alpha\right)}+\frac{1}{r\left(e^{\mu r}-1\right)}+\frac{1}{r\left(e^{-\mu r}-1\right)}\right].\qquad(11)$$

При $r\approx 1/\mu=10^{-15}$ м, α = 1/137 имеем результат, мало чем отличающийся от (3) и описывающий остаточное поле сильного взаимодействия. При $r \gg r_0 = 1/\mu$, $r\mu \gg 1$ первый член потенциала в (11) падает до «нуля», а второй перестает зависеть от α. Поэтому:

$$\left(\left[q_2\right]^{-1}\varphi\,|_{\mu r\gg 1}\right)\approx-\frac{\hbar c}{r}+\frac{\alpha\hbar c}{r}=-\frac{Gm_G^2}{r}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},\qquad(12)$$

где G – постоянная тяготения, $m_G=\sqrt{c\hbar/G}$ – планковская масса, e – заряд электрона, ε_0 – диэлектрическая постоянная. Это соответствует закону тяготения вдали от источника гравитационного поля и закону Кулона. Дифференцируя потенциальную энергию в (11), найдем силу. В ней при $\mu r\cong 1$ неквадратичные члены попарно уничтожают друг друга, так что сила оказывается обратно пропорциональной квадрату расстояния до объекта. При $\mu r \gg 1$, как уже показано в (12), сила переходит в гравитационную и электростатическую. При $\mu r\cong 0$ остается одна удвоенная «сила Кулона», остальные – объемные – взаимно уничтожают друг друга. Расстояние «покидания» поля расценивается как далекое от его источника, находящееся на «$-\infty$»: $\mu r\to$ «$-\infty$» и приводит к неограниченному возрастанию потенциала в (11) - конфайменту.

Таким образом, потенциал (11) объединяет остаточные силы сильного, гравитационного и электромагнитного взаимодействий в стационарном сферически симметричном поле.

Диффеоморфность обобщения потенциала Юкавы на основе линейной комбинации членов из формулы (5) заключается во взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом (в континуальном пределе) отображении $f\colon M \to N$ (4), (5) гладкого многообразия M в гладкое многообразие N, обратное к которому тоже является непрерывно дифференцируемым (является биекцией). Однако здесь хочется обратить внимание на диффеоморфность другого плана: форма потенциала (5) такова, что производные дробного порядка (и их обобщения) также образуют линейную комбинацию между собой, так что неважно, с какого «места» потенциала «начать» вести дифференцирование. Другими словами, неважно, что считать целой первой производной, что считать нулевой производной – самой функцией: все равно между собой они образуют взаимно однозначные целочисленные по производной линейные комбинации.

Как уже говорилось, уравнения (7) - (10) являются линейными уравнениями второго порядка, поэтому общее «стационарное» решение следует также искать как сумму частных решений (11). Любой источник в правой части уравнения может быть представлен Фурье-разложением, модифицированным аналогичным (3) $\to$ (5) образом. Тогда операторы рождения/уничтожения частиц в общем виде всегда остаются консервативными по отношению к системе, а сама система – замкнутой. Тогда любая сила в ней будет консервативной. По меткому замечанию Фейнмана любая сила консервативна. Если ее работа зависит от пути, значит, просто мы о ней пока мало знаем: «...все глубинные силы, все силы взаимодействия между частицами на самом фундаментальном уровне суть силы консервативные» [3].

Вообще, все подобные преобразования (Фурье, двухсторонее Лапласа), гамма-функции и ее обобщения, функция в координатах Крускала, пропагатор (функция Грина) и пр. – все модифицируется аналогичным образом, а бесконечные пределы интегрирования заменяются на величины ±1/«0» = «±∞». Так, в физике некоторого поля можем иметь минимальное действие $S = \pm\pi\hbar$, вдали от дискретного предела плавно переходящее в континуальное представление, с принципом наименьшего действия S = «0». Система становится «почти» замкнутой, с точностью до одного «0». Подобные инфинитезимальные рассуждения строятся на битриальном логическом алгоритме [6].

Уравнение (10) все еще не обладает полнотой описания поля, поскольку не включает чисто мнимые решения для виртуальных античастиц, с параметром $i\mu$. Чтобы восстановить полное уравнение, справа в (10) запишем источники в виде:

$$\text{источники} = \left(\sqrt{1+\alpha e^{-i\mu z}}\;\Box_1 + i\mu\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1+\alpha e^{i\mu z}}\;\Box^1 - i\mu\right)^2 \varphi^+\varphi\,,$$

или, выделяя в явном виде скалярное комплексное поле (модифицированное поле Хиггса):

$$\text{источники} = \left(\left(1+\alpha e^{-i\mu z}\right)\Box^2 + 2i\mu\cdot\partial_\mu - \mu^2\right)\left(\left(1+\alpha e^{i\mu z}\right)\Box^2 - 2\mu\cdot\partial_\mu - \mu^2\right)\psi^+\psi\,, \qquad (13)$$

Нелинейный член при даламбертиане описывает реакцию среды, «опоры» при действии частицы.

Если перегруппировать члены, выделяя квадраты разностей, то мы получим уравнения КГФ[2] в форме (2):

$$\text{источники} = \left(\Box^1\sqrt{1+\alpha e^{-i\mu z}}\;\Box_1\sqrt{1+\alpha e^{i\mu z}}-\mu^2\right)^2\;\psi^+\psi\;,$$

то есть, для поля $\alpha = -1$ и тогда при $\mu r >> 1$: $\mu r \approx \left\| g^{\mu\nu} \right\|$. Разлагая в ряд Тейлора любое из содержащихся в (10) или (13) модифицированных уравнений Дирака и оставляя два первых члена, получаем уравнения ОТО. Но такая теория гравитации оказывается «бесцветной». Чтобы учесть цвет фермионов, их электрический заряд и массу в системе их центра инерции (если он есть), необходимо, кроме скалярного поля учесть еще электромагнитное поле с вектор-потенциалом A_μ и глюонное поле с тензором напряженности $F_{\mu\nu}$.

При $\alpha = 0$ в (10), (13) просто имеем уравнения Дирака в метрике Минковского, составленные для частиц, их античастиц, виртуальных частиц и их античастиц, и сопряженные им поля пространства-времени (модифицированные поля Хиггса). Процесс «спонтанного» нарушения симметрии приобретает смысл: на больших временах хаотическая система стремится к упорядоченному несимметричному по полю состоянию с $\alpha = -1$ для бозонов поля и $\alpha = 1/137$ для фермионов частиц и их античастиц. Эта спонтанность естественна, поскольку симметричное состояние с $\alpha = 0$ ничем не выделяется в калибровке по ренормгруппе (4), не является аттрактором. Поэтому фермионы и бозоны «ищут» устойчивые состояния, и находят их: бозоны при $\alpha = -1$, а фермионы – при $\alpha = 1/137$.

Наличие в данной ячейке пространства частицы-бозона есть отсутствие частицы пространства. Мы называем такую частицу пространства спейсоном [5]. Наличие в данной ячейке спейсона говорит об отсутствии в этом месте частицы. При этом поля обладают не бесконечным набором степеней свободы, как в пространстве Фока, а “почти” бесконечным, весьма значительным, но конечным набором степеней свободы. Частицы рождаются парами из частицы поля – бозона. Линейное движение в скалярном поле (калибровочная операция сдвига) порождает массу. В инерциальной системе отсчета вращение частицы порождает массу покоя (калибровочное вращение). Таким образом, появляется описать динамические характеристики свойствами пространства. Тогда следствием существования электрического заряда становится, например, его прецессия в атоме водорода.

Полная частица – октавиан [5] – имеет спин s = 4. Он делится на два четырехмерных подпространства: с левым базисом и правым, их спин s = 2. Частицы пространства делятся на бозоны полей (s = 1), которые парно, при наличии достаточной напряженности поля делятся на фермионы, что и делает их похожими друг на друга. У них минимальный из всех возможных спин: s = ½ (в единицах $\hbar$).

Все частицы делятся на три поколения: в зависимости от трех действительных направлений в пространстве. Иерархия всех бозонов и фермионов Стандартной модели приобретает четкую структуру. При этом везде в собственном векторе присутствует комплексная часть кватерниона – спин. Одна действительная часть отвечает за массу, две – за электрический заряд, три – за цвет кварка. Устойчивые стационарные частицы существуют только в сферической симметрии (9). Группы Ли собственных вращений сосредоточены в экспоненте (10), (13).

Уравнение (10) в пределе ортогональности поля становится дважды вырожденным и переходит в уравнение Шредингера. При «больших» операторах $2q_1$ зарядов масс (10) переходят в уравнения механических колебаний [8].

Модифицированный потенциал Юкавы (5) на объекте с граничным размером $r_0 = 1/\mu = 10^{-15}$м описывает «жизнь» на поверхности в тонком слое вблизи r_0 остаточного сильного взаимодействия, когда начинает преобладать электромагнитная сила, собирающая протон в «шар». Тот же потенциал (5) на объекте с граничным размером $r_0 = 1/\mu = r_{\text{Земли}}$ описывает электромагнитную «жизнь» на поверхности в тонком слое вблизи r_0 остаточного насыщенного, экранированного электромагнитного взаимодействия, когда начинает преобладать гравитационная сила, собирающая Землю в «шар». Тот же потенциал (5) на объекте с граничным размером $r_0 = 1/\mu = r_{\text{Вселенной}}$ описывает гравитационную «жизнь» на поверхности в тонком слое вблизи r_0 остаточного насыщенного, экранированного гравитационного взаимодействия, когда начинает преобладать иная сила, делающая Вселенную замкнутой.

Следует признать, что математический аппарат битриальной математики все еще уступает аппарату квантовой электродинамики или хромодинамики. Но эти направления активно развиваются более 40 лет, а битриальной математике менее года [9]. Битриальная физика, языком описания для которой является битриальная математика – часть более общей Масштабной теории – формальной самоподобной теории, построенной на базе совсем другой логики мышления – битриальной логике [5], [6]. Битриальная физика является лишь физическим отображением этой теории.

Таким образом, получены модифицированные уравнения Клейна – Гордона – Фока, в пределе описывающие как сильное, так и гравитационное, и электромагнитное взаимодействие. Поэтому теперь их можно объединять с теорией Глейшоу – Вайнберга – Салама.

Работа подготовлена в рамках Масштабной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Квантовые поля, М., 1980.
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантовых полей. – 4-е изд., испр. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. – 600 с.

3. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике: Т. 8, 9: Квантовая механика. Пер. с англ. Т. 8, 9. Изд. 6.
4. Д.Б. Волов. Обобщенная динамика Ферхюльста – Рикера – Планка и ее связь с постоянной тонкой структуры // Вестник транспорта поволжья №4 (28). 67. 2011.
5. Д.Б. Волов. Битрон. Фибриал, битриал, скейлон и пять главных императивов. Октавиан. // Вестник СамГУПС. №2(24). 170. 2011.
6. Д.Б. Волов. Формализм битриальной логики / Современные методы теории краевых задач. / Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения –XV». Воронеж, ВГУ, 2011. С. 43.
7. Д.Б. Волов. Введение понятия абсолютной энтропии. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011. Т.18. В.2. С.106-107.
8. Кин Н. Тонг. Теория механических колебаний. М. 1963. 350 с.
9. Дм. Волов. Основы битриальной математики. // Вестник СамГУПС. №1(23). 165. 2011.

$$\mathrm{mcos}(x) := \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{e^{-\left(\sqrt{-1}\cdot x\right)}+al}+\frac{1}{e^{\left(\sqrt{-1}\cdot x\right)}+al}\right] \qquad \mathrm{msin}(x) := \frac{-\sqrt{-1}}{2}\cdot\left[\frac{1}{e^{-\left(\sqrt{-1}\cdot x\right)}+al}-\frac{1}{e^{\left(\sqrt{-1}\cdot x\right)}+al}\right]$$

$$\mathrm{imexp}(x) := \frac{1}{e^{-\left(\sqrt{-1}\cdot x\right)}+al} \qquad \mathrm{mexp}(x) := \frac{1}{e^{-x}+al}$$

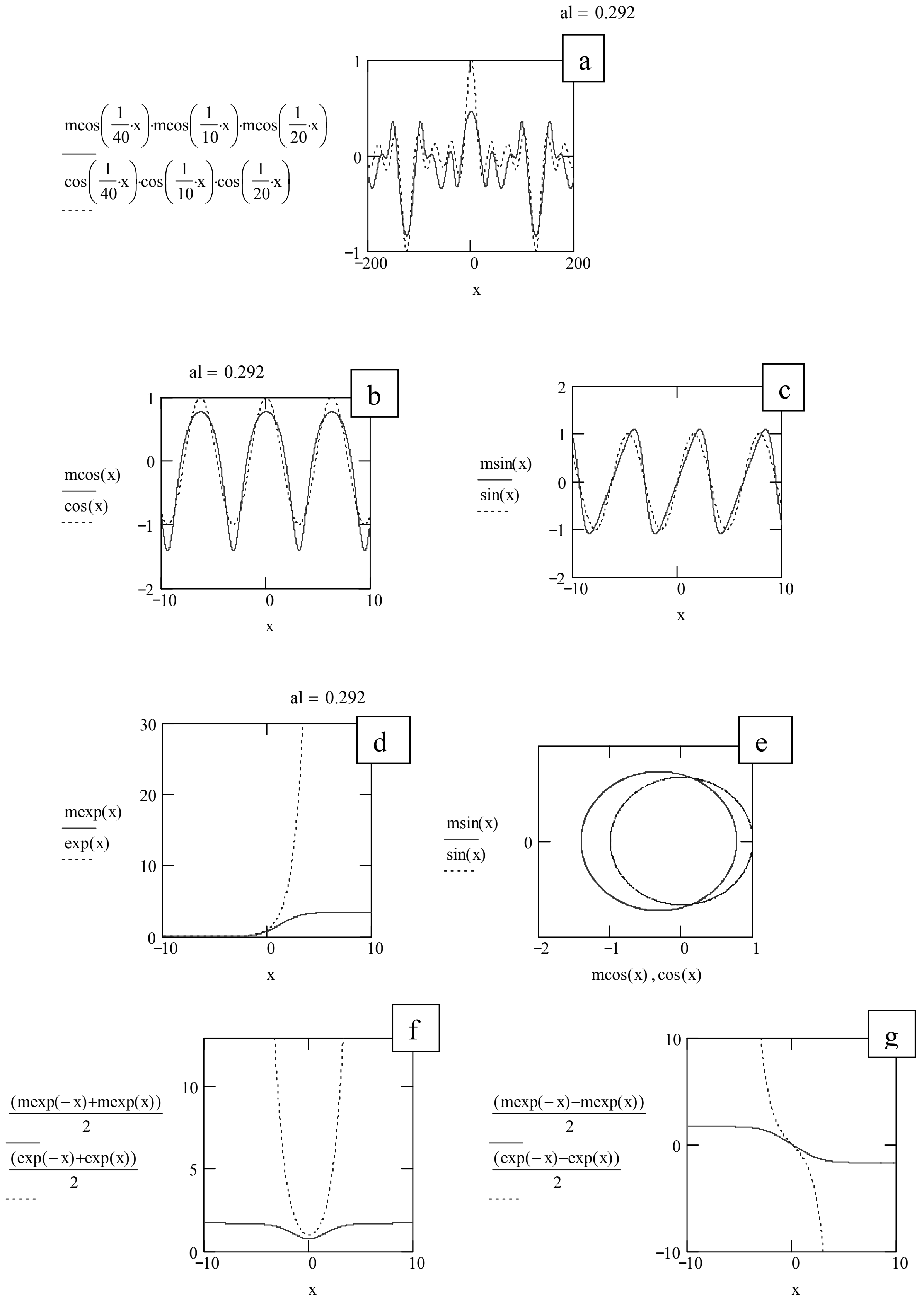

Рис. 1. Пример модифицированной стоячей волны (a), битриальные косинус (b), синус (c), битриальные экспонента (d), тригонометрический круг (e), чосинус (f), шинус (g). Постоянная α увеличена в 40 раз по сравнению с $\alpha = 1/137$, для визуализации различий.